Les nombres en base e^{π}

Simon Plouffe
27 août 2025

Résumé

Une expérience à grande échelle a été menée pour trouver des formules relatives à la base e^{π} . Les nombres en cette base sont

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a(n)}{e^{\pi n}}$$

La suite $a(n)$ est issue du catalogue OEIS. Ces expériences ont été inspirées par plusieurs faits. En effet, il est connu que la formule générant les partages d'entiers,

$$\prod_{k\geq 1} \frac{1}{1-x^k} = \sum_{n=0}^{\infty} p(n)\, x^n$$

est égale à

$$\frac{2^{3/8}\, \Gamma(3/4)}{\pi^{1/4}\, e^{\pi/24}} \qquad (1)$$

lorsqu'elle est évaluée au point $x = e^{-\pi}$. En analysant les 387007 suites du catalogue OEIS le modèle qui a été utilisé tient au fait que la somme infinie évaluée à e^{π}, est une expression qui permet d'être détectée à l'aide d'un programme comme lindep de Pari-Gp ou PSLQ (version Maple). Le procédé a permis de trouver 792 expressions similaires à (1).

La plupart des nombres réels connus en base 10 qui sont issus de l'analyse mathématique classique n'ont aucun motif dans leur développement décimal. Par contre en base e^{π} c'est beaucoup plus riche puisqu'une classe de nombres ont des coefficients qui sont issus justement de l'analyse, la combinatoire et la théorie des nombres. Les exemples sont nombreux et variés.

Pour détecter une relation avec des entiers, il est nécessaire de prendre le logarithme de la somme et d'évaluer à une certaine précision (160 chiffres décimaux) si le signe '=' est vérifié.

$$\log\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a(n)}{e^{k\pi n}}\right) \equiv [ln(\pi)\,,\ \pi,\ \ln(2)\,,\ \ln(3), \ln\left(\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\right)] \qquad (2)$$

Le signe $\equiv$ signifie qu'il y a une identité avec 0 ou dit autrement, le logarithme de la somme est une combinaison linéaire de la liste des constantes. Cette hypothèse semble être la bonne puisque plus de 792 expressions ont été identifiées. La première version de cet article publié en 2023 en avait identifié 659. En rajoutant des éléments à la liste (2) :

$$\pi, \ln(\pi)\,, \ln(2)\,, \ln(3)\,, \ln(5)\,, \ln\Gamma(\frac{1}{3})\,, \ln\Gamma(\frac{1}{4}),$$

$$\ln\Gamma\left(\frac{1}{5}\right), \ln\Gamma\left(\frac{2}{5}\right), \ln\Gamma\left(\frac{1}{6}\right), \ln\Gamma\left(\frac{1}{8}\right), \ln\Gamma\left(\frac{3}{8}\right), \ln\Gamma\left(\frac{1}{10}\right),$$

$$\ln\Gamma(\frac{3}{10})\,, \ln\Gamma(\frac{1}{12})\,, \ln\Gamma(\frac{5}{12}).$$

On obtient plus d'identités, de 659 à 792 y compris celles reliées aux fonctions de Ramanujan les plus connues.

La chose remarquable à propos de ces expressions est le fait que malgré la grande variété de contextes combinatoires, elles ont toutes le même modèle si on évalue la suite au point e^{π}. L'expérience est concluante, puisque 363 suites se réfèrent aux fonctions thêta, 262 aux fonctions Ramanujan et variantes et 57 aux partitions (partages) d'entiers. Par contre du travail reste à faire puisqu'il y a des milliers d'autres suites se référant aux fonctions thêta et des milliers aux partitions dans tous les contextes.

Note : Les suites étendues proviennent des fichiers 'b' du site OEIS, normalement une suite comporte environ 3 lignes pleines d'environ 80 caractères de termes. Dans bien des cas de figure il a été pensé depuis longtemps qu'une extension de la suite de base était nécessaire. Le choix a été fait de prendre les 2000 premiers termes de chaque suite (lorsque c'est disponible) et avec une précision de 160 décimales pour les sommes évaluées.

Index: la plupart des suites sont définies à partir de 0, certaines à partir de 1 ou un autre point de départ. Ça ne change en fait pas le résultat final puisque le facteur e^{π} apparaît alors dans l'expression finale, ce n'est qu'un décalage. J'ai donc pris ce point comme départ. Dans certains cas l'exposant est même fractionnaire.

Chaque page contient le numéro de la suite, le nom, la formule, les quelques premiers termes de la suite et la valeur en $x = e^{-\pi}$.

Autre approche.

On peut y aller dans l'autre direction à partir d'une valeur connue. Un bon exemple est la suite A000122 qui énumère le nombre de façons de représenter n comme somme de 1 carré. Évaluée en $x = e^{-\pi}$ elle nous donne bien la valeur $\frac{\pi^{1/4}}{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}$ mais si on effectue le développement en base e^{π} on obtient la suite :

1,2,0,0,2,0,0,0,0,2,0,0,0,0,0,0,2,0,0,0,0,0,0,0,0,2,0, …

Ça fonctionne bien sûr si on connait à l'avance le nombre $\frac{\pi^{1/4}}{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}$.
Ce procédé ne fonctionne que si les termes de la suite $a(n)$ ne dépassent pas la valeur e^{π}. Le développement d'un nombre en base e^{π} utilise le même procédé que celui qu'on peut utiliser pour développer un nombre réel en base 2, 10 ou 16. Il est donc possible à partir de valeurs semblables à la formule (1) de remonter à l'envers. Un programme en a trouvé quelques exemples mais ce n'est pas assez pour en faire une méthode.

Références :

[1] Le catalogue des suites d'entier : https://oeis.org/ pour tous les numéros de suites apparaissant dans ce document.
[2] Fonction Tau de Ramanujan : https://mathworld.wolfram.com/TauFunction.html
[3] Fonction de Partition : https://mathworld.wolfram.com/PartitionFunctionP.html
[4] Sommes de carrés : https://mathworld.wolfram.com/SumofSquaresFunction.html
[5] Séries Theta : https://mathworld.wolfram.com/ThetaSeries.html
[6] Plouffe Simon, Neil Sloane, The Encyclopedia of Integer Sequences, Academic Press, 1995.
[7] Plouffe, Simon, Les nombres en base e^{π} (2023) disponible ici : https://archive.org/details/all-articles/articles/Les%20nombres%20en%20base%20exp%28Pi%29%202023.pdf http://plouffe.fr/articles/
[8] Theta functions sur Wikipedia : https://en.wikipedia.org/wiki/Theta_function